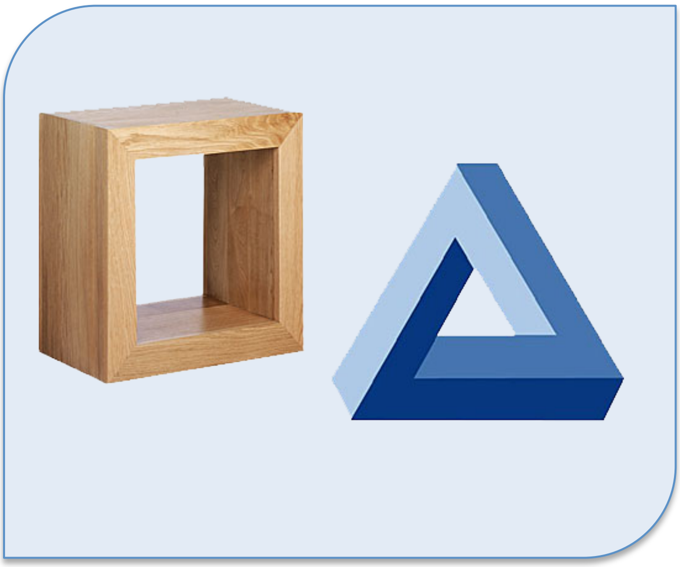
LÓGICA

Salustiano Fernández Viejo



{paradojas:

Siendo Sancho Panza gobernador de la Ínsula Barataria llegaron a consultarle lo siguiente:

“Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío, y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso. Digo, pues, que sobre este río estaba un puente, y al cabo de él una horca y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que aplicaban la ley que puso el dueño del río, del puente y del señorío, que era en esta forma: "Si alguno pasare por este puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna." Sabida esta ley y la rigurosa condición de ella, pasaban muchos, y luego en lo que juraban se echaba de ver que decían verdad y los jueces los dejaban pasar libremente. Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre juró y dijo que por el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que ahí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento y dijeron: "Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y conforme a la ley debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre".Pídese a vuestra merced, señor gobernador, qué harán los jueces de tal hombre, que aún hasta ahora están dudosos y suspensos, y, habiendo tenido noticia del agudo y elevado entendimiento de vuestra merced, me enviaron a mí a que suplicase a vuestra merced de su parte diese su parecer en tan intricado y dudoso caso."

(CERVANTES, *Don Quijote de La Mancha*, 2ª parte, Capítulo LII)

LÓGICA

ÍNDICE

LÓGICA

— PARTE 1ª —

LÓGICA PROPOSICIONAL O LÓGICA DE ENUNCIADOS

1.- LOS SIGNOS

Cualquier realidad que representa o evoca, para alguien, otra cosa distinta de sí misma la consideramos un signo.

Ejemplos: las señales de tráfico, las palabras, la danza de las abejas, el vuelo de las aves, el humo, los sueños…

Por tanto, para que algo pueda ser considerado signo es necesario, en primer lugar, que tenga algún significado para alguien.

Una primera aproximación a los signos distingue entre aquellos que poseen un solo significado (son llamados **señales**), y aquellos que poseen significaciones múltiples (**símbolos**). Ahora bien, si tenemos en cuenta el tipo de relación que los signos mantienen con su significado, éstos se clasifican en:

- Vestigios o **índices**: La relación que este tipo de signos mantiene con su significado es de carácter natural. Por ejemplo: *el humo es «índice» o «vestigio» del fuego, una huella en la arena lo es del animal correspondiente, etc.*

- Imágenes o **iconos**: La relación que este tipo de signos mantiene con su significado es una relación de semejanza o parecido. Por ejemplo: *algunas señales de tráfico, las fotografías, las pinturas realistas, los emoticonos, etc.*

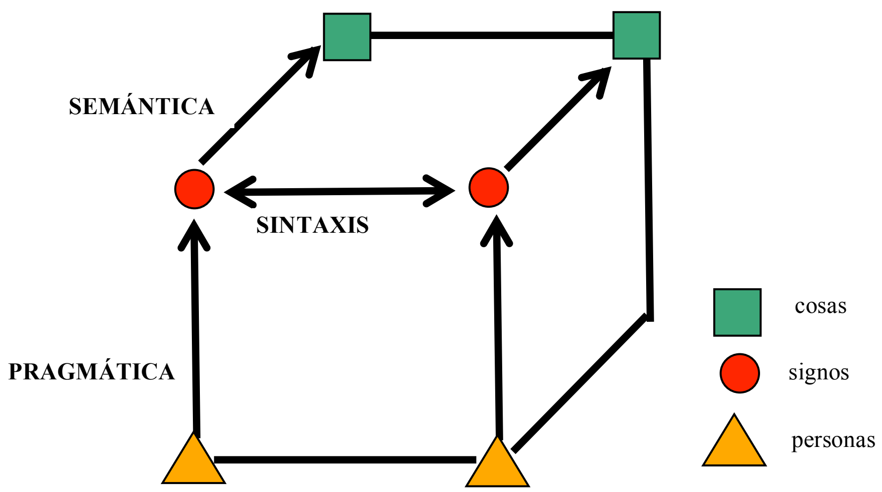
- **Símbolos**: son aquel tipo de signos que mantienen con su significado una relación puramente arbitraria o convencional. Por ejemplo: *las palabras del lenguaje natural humano, los números, las pinturas abstractas, las banderas o los signos de la lógica…*

La ciencia que estudia los signos se llama SEMIÓTICA. Ésta, a su vez, se divide en tres partes, que constituyen tres maneras de estudiar los signos:

1. **Sintaxis**: estudia los signos teniendo únicamente en cuenta las diversas relaciones que se establecen entre ellos con independencia de su significado. Este es el tipo de estudio que realizan todas las *Gramáticas*.

2. **Semántica**: estudia los signos teniendo en cuenta la relación que mantienen con su significado o referencia, es decir, con las cosas de la realidad representada por ellos. Este es el tipo de estudio que hacen los *Diccionarios* o las *Etimologías*.

3. **Pragmática**: estudia los signos teniendo en cuenta la relación que existe entre ellos y las personas que los utilizan para comunicarse o representar algo. Este es el tipo de estudio que realizan los investigadores de las *jergas o argots profesionales, étnicos, regionales, de pandillas…*



2. COMUNICACIÓN, LENGUAJE Y METALENGUAJE

La comunicación es un fenómeno natural basado en la capacidad que poseen todas las especies animales de transmitirse información mediante signos de muy diverso tipo: sonoros, visuales, olfativos, etc.

Esta capacidad la encontramos especialmente desarrollada en el lenguaje humano. Pues aunque los animales pueden transmitir información mediante signos unívocos (***señales:*** así, por ejemplo, que un perro gruña y te enseñe los dientes es señal indudable de que te puede morder), el lenguaje humano está compuesto principalmente de signos multívocos (***símbolos***), y *además* posee la capacidad referirse a sí mismo. Es decir, puede convertirse en un ***Metalenguaje***: es el lenguaje usado para hablar del propio lenguaje, es decir, de sí mismo. [La capacidad autorreferencial del lenguaje humano es el origen de buena parte de las paradojas lógicas].

Ejemplo: La frase *«"Gato" tiene cuatro letras»* es una frase en la que el lenguaje habla de sí mismo y, por tanto, pertenece al «metalenguaje». A diferencia de la frase *«El gato de mi casa es gris»,* en la cual el lenguaje sirve para referirse a la realidad extralingüística.

3. LENGUAJE NATURAL

Se entiende por **Lenguaje Natural** al lenguaje (=conjunto de símbolos) utilizado por una sociedad para comunicarse. Precisemos que tal lenguaje no es 'natural' en sentido estricto, sino que lo aprendemos en la sociedad, la cual lo ha ido creando a lo largo del tiempo, siendo por ello artificial (=algo construido por el hombre) a diferencia de lo que ocurre con los demás animales cuyo lenguaje sí es totalmente natural o innato, pues lo expresan de modo espontáneo, incluso si no están en contacto con otros individuos de su misma especie.

No obstante, llamaremos Lenguaje Cotidiano, Ordinario, o incluso también Lenguaje Natural, al que aprendemos en sociedad sin apenas darnos cuenta y que sirve para comunicarnos y referirnos a la realidad que nos rodea.

3.1 ELEMENTOS DEL LENGUAJE NATURAL: SÍMBOLOS Y REGLAS

El Lenguaje Natural humano consta de un conjunto finito de **símbolos** (palabras que forman el Vocabulario) y un número finito también de **reglas** (constituyen la Sintaxis), las cuales determinan cómo combinar correctamente los símbolos del vocabulario, es decir, establecen cómo formar correctamente oraciones en ese lenguaje.

3.2. ¿QUÉ ES UNA ORACIÓN?

Es una expresión lingüística sintácticamente correcta (=está bien construida de acuerdo con las reglas) y que posee sentido completo. Llamamos «expresión lingüística» a cualquier combinación de símbolos de un lenguaje. *Ejemplos: "El cuarzo es un mineral", "¿Qué hora es?", "Cierra la puerta",…*

Por el contrario, expresiones como *"Vivir con cuando", "Lloviendo noche estaba aquella", etc.* no son oraciones porque o bien no tienen sentido completo o son sintácticamente defectuosas.

3.3. ¿QUÉ ES UNA ORACIÓN ENUNCIATIVA O ENUNCIADO?

Es una expresión lingüística que tiene sentido completo y que puede ser verdadera o falsa. De los anteriores ejemplos de oraciones, sólo el primero (*"El cuarzo es un mineral"*) es un **enunciado**, pues dice algo que puede ser verdadero o falso, mientras que los otros dos ejemplos (*"¿Qué hora es?", "¡Cierra la puerta!"*) no lo son porque no cabe preguntarse si es verdadero o falso lo que 'dicen o expresan'.

Desde Aristóteles se denomina *"uso apofántico"* del lenguaje a la utilización de éste para formular oraciones cuyo contenido puede ser verdadero o falso; estas oraciones reciben el nombre de enunciados. Son oraciones que se refieren a algún hecho de la realidad y que, por tanto, si lo 'expresan' bien, son verdaderas, y si no, falsas.

3.4. INSUFICIENCIAS DEL LENGUAJE NATURAL

Dada la multivocidad (=riqueza significativa) que lo caracteriza, el Lenguaje Natural resulta insuficiente para las exigencias de exactitud de la ciencia o para la formulación precisa de razonamientos complejos (aunque esa riqueza expresiva lo convierta en el mejor aliado del poeta, el novelista o el orador). Las insuficiencias del Lenguaje Natural con respecto a la precisión de sus expresiones son consecuencia de:

a) Ambigüedades semánticas: en el Lenguaje Natural hay muchas palabras y expresiones cuyo significado no es preciso, sino ambiguo; rebosa de términos polisémicos (es decir, palabras que tienen más de un significado). *Ejemplo: "Pedro alquiló una casa*" (no sabemos si la casa que Pedro alquila es de su propiedad y se la alquila a otra persona, o si Pedro la alquiló para habitarla él), *"Llevaba el gato en el coche", "Te sigo",…*

b) Deficiencias sintácticas: las reglas sintácticas que determinan cómo combinar correctamente las palabras del lenguaje natural carecen de criterios rigurosos que permitan evitar oraciones sin sentido. Ejemplos*: "Los martillos cerrados paladean locamente", "Allí donde los libros bordean las ásperas playas se alza el fondo de planicie más elevado",…*

4. LENGUAJE ARTIFICIAL

Tratando de superar las citadas limitaciones del Lenguaje Natural, con el objetivo de proporcionar a las ciencias un lenguaje exacto y riguroso, se han ido construyendo los Lenguajes Artificiales, esto es, lenguajes bien definidos que poseen una estructura sintáctica clara y una operativa eficaz.

En líneas generales puede decirse que todas las ciencias, en especial las ciencias de la naturaleza, emplean Lenguajes Artificiales y que ésta ha sido una de las condiciones para su progreso. Por ejemplo, los símbolos de la Química, la Física, la Biología, pero también los de la Economía, la Lingüística, etc., constituyen tipos de lenguaje artificial.

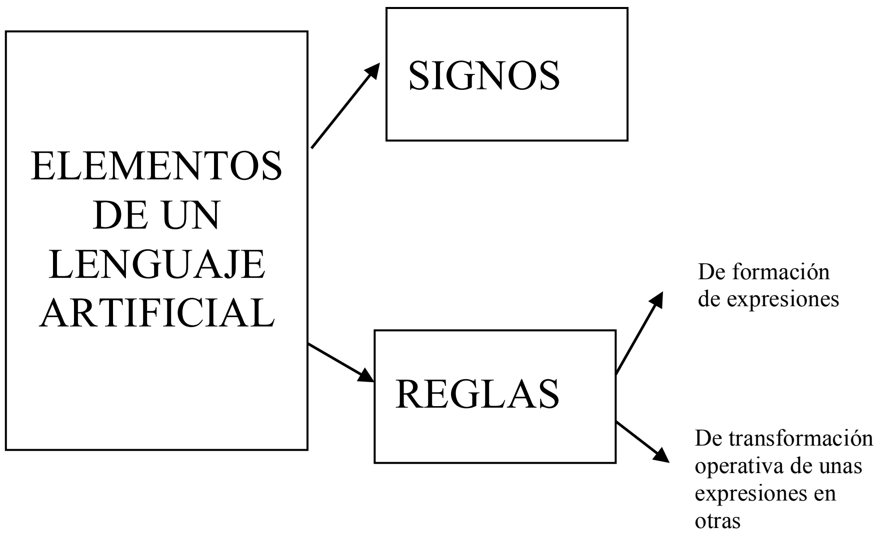
4.1. ELEMENTOS QUE INTEGRAN UN LENGUAJE ARTIFICIAL

Básicamente consta de los mismos elementos que cualquier lenguaje natural (un conjunto se signos y una serie de reglas sintácticas –para combinar dichos signos-), pero se le exige además:

a) Que los signos estén bien definidos, para que no quepan ambigüedades;

b) Que el conjunto de las reglas para la formación de expresiones, impida la construcción de expresiones carentes de sentido y permita saber, en cualquier momento, si una determinada combinación de signos es una expresión bien formada del Lenguaje;

c) Y que posea, además, un conjunto de reglas operativas o de transformación de expresiones, que permita deducir a partir de unas expresiones correctas del Lenguaje otras que también lo sean, para de ese modo construir rigurosas y complejas cadenas deductivas.



La **Lógica** y las **Matemáticas** son ejemplos de Lenguajes Artificiales.

5. LENGUAJE FORMAL

Se denomina Lenguaje Formal a un Lenguaje Artificial cuyos signos son formales (es decir, carecen de significado) y cuya sintaxis permite operar con dichos signos como en un cálculo.

La Lógica y las Matemáticas son Lenguajes Artificiales y, además, Formales.

¿Qué significa que los signos de un Lenguaje Formal carecen de significado?

Pues que tales signos no se refieren en absoluto a la realidad. Así, por ejemplo, el signo matemático '2' no se refiere a dos cosas concretas, como dos manzanas o dos peras; y lo mismo le ocurre, como veremos inmediatamente, a los signos lógicos 'p', 'q', 'r', que no se refieren a ninguna proposición determinada, pudiendo representar a cualquiera.

¿Qué significa que las reglas de un Lenguaje Formal poseen la eficacia de un cálculo?

- Que mediante tales reglas siempre podremos saber si una expresión (es decir, un conjunto de signos) está bien formada en ese lenguaje.

- Y que mediante la aplicación de dichas reglas podremos ***transformar*** expresiones bien formadas en dicho lenguaje en otras expresiones que también estén bien formadas (expresiones que por algún motivo nos interesa deducir).

6. LA LÓGICA COMO LENGUAJE FORMAL

La Lógica puede definirse como aquella ciencia o reflexión sistemática que estudia las condiciones o leyes que debe cumplir todo razonamiento para ser formalmente válido.

6.1. ¿QUÉ ES UN RAZONAMIENTO?

Un razonamiento es un proceso mental que se caracteriza porque en él se produce el *paso* de ciertas afirmaciones (las PREMISAS) a otra afirmación (la CONCLUSIÓN) que se deriva, deduce o infiere de aquéllas.

{Una pequeña aclaración: todo razonamiento es pensamiento (es decir, es una actividad mental), pero no todo pensamiento es razonamiento, pues podemos pensar (en un árbol, en una isla o en un triangulo, por ejemplo), sin pretender sacar conclusión alguna acerca de lo pensado, es decir, sin integrarlo en un razonamiento.}

6.2. CONDICIONES QUE DEBE REUNIR UN RAZONAMIENTO PARA SER FORMALMENTE VÁLIDO

Un razonamiento es formalmente «válido», es decir, posee una estructura lógica correcta, cuando existe una conexión entre sus afirmaciones tal que la conclusión se deduce necesariamente de las premisas.

Hemos de distinguir entre **verdad** y **validez**:

- La ***verdad*** es una propiedad de los enunciados. Un enunciado será verdadero o falso si lo que él afirma ocurre o no en la realidad. Por ejemplo, *"los gatos son animales con alas"* o *"está lloviendo"*, son enunciados verdaderos si lo que afirman puede ser observado en la realidad. (A este tipo de verdad se le denomina también ***VERDAD MATERIAL***)

- Los razonamientos, sin embargo, son ***válidos*** no porque los enunciados que lo integren sean verdaderos, pues es posible construir razonamientos perfectamente válidos con enunciados falsos, sino que un razonamiento es válido únicamente si la conclusión se deduce necesariamente de las premisas. (Esto es lo que se denomina también ***VERDAD FORMAL***).

Lo que sí sabemos es que si un razonamiento es *válido* y las premisas son *verdaderas*, entonces la conclusión será necesariamente *verdadera*. De la «validez» del razonamiento se ocupa la Lógica (que es una ciencia formal), mientras que la «verdad» de las proposiciones es un asunto de las ciencias empíricas.

Veamos el siguiente ejemplo que nos permite distinguir **verdad** de **validez**:

Premisas

Los perros (A) son reptiles (B)

Los gatos (C) son perros (A)

Conclusión

Los gatos (C) son reptiles (B)

Este razonamiento es *válido* formalmente, aunque sus premisas y su conclusión sean *falsas*.

Pues si prescindimos de su contenido y tenemos sólo en cuenta la *forma* en que están conectadas sus afirmaciones, comprobamos que la conclusión se deduce *necesariamente* de las premisas.

A es B

C es A

C es B

VERDAD ≠ **VALIDEZ (O CORRECCIÓN)**

Ser verdadero o falso es una cualidad de los:

Enunciados

Que consiste en que expresen bien/adecuadamente la…

Realidad

Ser válido o no (correcto o incorrecto) es una cualidad de los:

Razonamientos

Que consiste en que en ellos haya una…

Conexión adecuada y necesaria entre enunciados

{ **verdad material** } ≠ { **verdad formal** }

7. LA LÓGICA PROPOSICIONAL O LÓGICA DE ENUNCIADOS

La Lógica proposicional o de enunciados es el apartado más elemental y básico de la Lógica. Es el más elemental porque es el más sencillo. Es básico, porque sirve de base al resto del edificio de la Lógica.

La tarea de la Lógica proposicional consiste en ocuparse de estudiar la validez formal de los razonamientos tomando en bloque las proposiciones que los forman, es decir, sin hacer un análisis de tales proposiciones.

Una proposición es tomada en bloque cuando no se tienen en cuenta los elementos que la integran, pasando a ser considerada como un todo o unidad lingüística básica.

Así, por ejemplo, una proposición como *"Los gatos son mamíferos"* puede ser simbolizada en Lógica de varios modos, algunos de los cuales son los siguientes:

-En ***Lógica Proposicional***: p [*Se lee «p»*]

(toma la proposición en bloque sin analizarla)

-En ***Lógica Silogística***: S -***A***- P [*Se lee «Todos los S son P»*]

(analiza la proposición y tiene en cuenta cuál es el sujeto y el predicado de la misma, además analiza si el predicado se dice de todos, algunos o ningún sujeto)

-En ***Lógica de Predicados***: $\wedge x\ (Gx \rightarrow Mx)$ [*Se lee «Para todo 'x', si 'x' es 'G', entonces 'x' es 'M'»*]

(el análisis destaca el tipo de relación que se da entre las propiedades atribuidas al sujeto de la proposición)

En la LÓGICA PROPOSICIONAL una proposición es <u>simple</u> si no puede descomponerse en partes que a su vez sean proposiciones. También se la denomina ***proposición atómica***. Ejemplos: *"Los gatos son mamíferos", "Pedro viene con Luis".* Mientras que una proposición será <u>compleja</u> si está compuesta por varias proposiciones simples unidas de algún modo. También es llamada ***proposición molecular***. Ejemplos: *"Los gatos son mamíferos, pero a mí me gustan más los pájaros exóticos", "Si Pedro viene con Luis y trae comida, nos iremos todos al campo".*

7.1. LOS SIGNOS DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

a) **Variables proposicionales**: para simbolizar las proposiciones simples se utilizan las letras minúsculas del alfabeto a partir de la "p" *(p, q, r, s, t, u, a, b, c…)*. Estas letras se denominan *variables proposicionales* porque se utilizan para representar a cualquier proposición del Lenguaje Natural. Por ejemplo: la proposición simple *"Los gatos son mamíferos"* la simbolizamos con una "p". Y la proposición compleja *"Los gatos son mamíferos y les gusta cazar ratones"* la simbolizamos como 'p *y* q'.

Admitimos que cualquier proposición simple es o bien verdadera o bien falsa, pero no ambas cosas a la vez. Éste es el *Principio de Bivalencia*: las proposiciones simples sólo pueden tener dos valores de verdad: o son verdaderas o son falsas.

p	→ cualquier proposición
1	→ verdadera
0	→ falsa

b) **Símbolos auxiliares:** en lógica se utilizan paréntesis, corchetes y llaves para agrupar ordenadamente las proposiciones.

( ), [ ], { }

c) **Conectivas o constantes lógicas**: se denominan conectivas a aquellos signos lógicos que sirven para unir a las proposiciones entre sí. Las conectivas que manejaremos son las siguientes:

- NEGADOR (¬):

¬ …se lee *"no"*

¬ p …se lee *" no-p"*

¬ q …se lee *"no-q"*

Las expresiones siguientes: *"No podremos ir de excursión a la Sierra de Gredos", "Pedro ni siquiera me escuchó",* las simbolizamos '¬ **p**'.

El negador es aquella conectiva que al aplicarse a una proposición cualquiera, sea simple o compleja, la convierte en falsa si es verdadera y en verdadera si es falsa.

=> Tabla de verdad del negador:

p	¬ p
1	**0**
0	**1**

Aclaración: el ***Negador*** es llamada «conectiva monádica» porque afecta sólo a *una* proposición, bien sea simple, ¬ **p**, que se lee «**no**-p», o, como veremos enseguida, bien sea compleja, ¬ **(p ∧ q)**, que se lee *«**no es cierto que** p y q».* Todas las demás conectivas son «diádicas» porque siempre afectan a dos proposiciones, sean simples o complejas.

- CONJUNTOR (∧):

∧ …se lee *"y"*

p ∧ q …se lee *"p y q"*

Las expresiones siguientes: *"Hoy estamos alegres y nos iremos a bailar", "Pedro es buena persona, aunque debería ducharse más", "El sol se nubló, pero seguimos caminando"*, las simbolizamos en lógica proposicional '**p ∧ q**'.

El conjuntor es aquella conectiva que sólo es verdadera si las dos proposiciones que une son ambas verdaderas, y que es falsa en los demás casos.

=> Tabla de verdad del conjuntor:
(Las combinaciones posibles de los valores de verdad de 2 proposiciones (p, q), cada una de las cuales puede ser verdadera o falsa, son cuatro: que las dos sean verdaderas, que una sea verdadera y la otra falsa, que una sea falsa y la otra verdadera, y que las dos sean falsas. Para un número 'n' de proposiciones las combinaciones de sus valores de verdad serán 2^n.)

p	q	p ∧ q
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**0**

p	q	r	p ∧ q	(p ∧ q) ∧ r
1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	**0**
1	0	1	0	**0**
1	0	0	0	**0**
0	1	1	0	**0**
0	1	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**
0	0	0	0	**0**

Ejemplos:

¬ p ∧ q …se lee *"no-p y q"*, y su tabla de verdad sería:

p	q	¬ p	¬ p ∧ q
1	1	0	**0**
1	0	0	**0**
0	1	1	**1**
0	0	1	**0**

p ∧ ¬ q …se lee *"p y no-q"*, y su tabla de verdad es:

p	q	¬ q	p ∧ ¬ q
1	1	0	**0**
1	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	0	1	**0**

¬ (p ∧ q)…se lee *"**no es cierto que** p y q"*, y su tabla de verdad es:

p	q	p ∧ q	¬ (p ∧ q)
1	1	1	**0**
1	0	0	**1**
0	1	0	**1**
0	0	0	**1**

¬ p ∧ ¬ q…se lee *"no-p y no-q"*, y su tabla de verdad es

p	q	¬ p	¬ q	¬ p ∧ ¬ q
1	1	0	0	**0**
1	0	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	0	1	1	**1**

- DISYUNTOR (∨):

∨ …se lee *"o"*

p ∨ q …se lee *"p o q"*

Las expresiones siguientes: *"Pedro vendrá el lunes o el martes", "O bien me quedo en casa o bien voy al cine", "Tal vez escuche esa canción o tal vez me vaya a pasear al río* , las simbolizamos **'p ∨ q'**.

El disyuntor es aquella conectiva que sólo es falsa si las dos proposiciones que une son ambas falsas, y verdadera en los demás casos.

La tabla de verdad del disyuntor es:

p	q	p ∨ q
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Ejemplos:

¬ p ∨ q …se lee *"no-p o q"*, y su tabla de verdad es

p	q	¬ p	¬ p ∨ q
1	1	0	**1**
1	0	0	**0**
0	1	1	**1**
0	0	1	**1**

¬ (¬ p ∨ q) …se lee *"**no es cierto que** no-p o q"*, y su tabla de verdad es

p	q	¬ p	¬ p ∨ q	¬ (¬ p ∨ q)
1	1	0	1	**0**
1	0	0	0	**1**
0	1	1	1	**0**
0	0	1	1	**0**

¬ (p ∧ q) ∨ ¬p …se lee *"**no es cierto que** p y q, o no-p"*, y su tabla de verdad es

p	q	p ∧ q	¬ (p ∧ q)	¬ p	¬ (p ∧ q) ∨ ¬ p
1	1	1	0	0	**0**
1	0	0	1	0	**1**
0	1	0	1	1	**1**
0	0	0	1	1	**1**

p ∨ (¬ q ∧ ¬ p) …se lee *"o bien p o bien no-q y no-p";* más sencillamente también puede leerse *"p, o, no-q y no-p"*; y su tabla de verdad, haciendo una presentación abreviada, es:

p	∨	(¬	q	∧	¬	p)
1	**1**	0	1	0	0	1
1	**1**	1	0	0	0	1
0	**0**	0	1	0	1	0
0	**1**	1	0	1	1	0

[Primero asignamos los valores a las proposiciones simples 'p', 'q', 'r'..., y después vamos obteniendo el valor correspondiente de las conectivas que los unen o afectan, hasta obtener el valor de la "conectiva dominante" en la fórmula, es decir, la conectiva que afecta a toda la fórmula]

- <u>CONDICIONAL</u> (→):

→ …se lee *"Si…, entonces…"*

p → q…se lee *"Si p, entonces q"* ('p' es el antecedente, y 'q' es el consecuente)

Las expresiones *"Si llueve, las calles se mojan", "Si vienes mañana, iremos a casa de Luis", "Si supieras lo que me ha dicho Pedro, quedarías perplejo",* las simbolizamos como **'p → q'**.

El condicional es aquella conectiva que sólo es falsa cuando, siendo el antecedente verdadero, el consecuente sea falso, y verdadera en los demás casos. Llamamos 'antecedente' del condicional a la proposición que se halla a su izquierda, y 'consecuente' a la que está a su derecha.

La <u>tabla de verdad del condicional</u> es:

p	q	p → q
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

Ejemplos:

¬ p → q …se lee *"Si no-p, entonces q"*, y su tabla de verdad es

¬	p	→	q
0	1	**1**	1
0	1	**1**	0
1	0	**1**	1
1	0	**0**	0

¬ (p → ¬ q) …se lee *"No es cierto que si p, entonces no-q",* y su tabla de verdad es:

¬	(p	→	¬	q)
1	1	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0

- BICONDICIONAL (↔):

↔ …se lee *"Sólo si…"*

p ↔ q …se lee *"p sólo si q"* o *"Sólo si p, entonces q"*

Las expresiones *"Sólo si llueve, me quedaré en casa", "Sólo en el caso de que sepas la primera pregunta, deberás responder también a la segunda", "Te contestaré sólo si tu respuesta me satisface"*, las simbolizamos **'p ↔ q'**.

El bicondicional es aquella conectiva que sólo es verdadera si las dos proposiciones unidas por ella tienen ambas el mismo valor de verdad, es decir, son ambas verdaderas o falsas a la vez.

La tabla de verdad del bicondicional es:

p	q	**p ↔ q**
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**1**

Ejemplo:

p ↔ ¬ q …se lee *"Sólo si p, entonces no-q"* o también *"p sólo si no-q"* y su tabla de verdad es:

p	↔	¬	q
1	**0**	0	1
1	**1**	1	0
0	**1**	0	1
0	**0**	1	0

7.2. TABLA DE VERDAD DE CUALQUIER FÓRMULA

Para hallar la tabla de verdad de cualquier fórmula hay que dar los siguientes pasos:

1) En primer lugar, se asignan los valores 1 y 0 a las proposiciones simples que componen la fórmula, combinando de todos los modos posibles tales valores.

Recordemos que para una fórmula con dos proposiciones distintas, las combinaciones posibles de sus valores de verdad son $2^2 = 4$

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Para una fórmula con tres proposiciones distintas, las combinaciones posibles de sus valores de verdad son $2^3 = 8$. Con cuatro proposiciones son $2^4 = 16$. Etc.

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

p	q	r	s
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

El modo más fácil de combinar los valores de verdad de las proposiciones que integran cualquier fórmula, consiste en asignarle a la 1ª proposición por orden alfabético la mitad de 1 y la mitad de 0. A la siguiente proposición, la mitad de la mitad de 1, la mitad de la mitad de 0, hasta completar el número de las combinaciones que admita la fórmula… Y a la última proposición de la fórmula siempre se le asignará 1 y 0 alternativamente hasta completar las combinaciones posibles de la fórmula.

2) Y en segundo lugar, se hallan los valores de verdad de las conectivas existentes en la fórmula, empezando por las menos dominantes (es decir, por las que afectan a menor parte de la fórmula) y terminando por la conectiva dominante (es decir, por aquella que afecta a toda la fórmula y cuya tabla de verdad, por tanto, será la tabla de verdad de la fórmula completa).

Ejemplos:

Tabla de verdad de la fórmula: ¬ p → (r ∧ ¬ q) …se lee *"Si no-p, entonces r y no-q"*. La conectiva dominante es el '→'.

p	q	r	¬ q	r ∧ ¬ q	¬ p	¬ p → (r ∧ ¬ q)
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0

Colocando los valores debajo de las proposiciones y de las conectivas, la anterior tabla de verdad también podría representarse así:

¬	p	→	(r	∧	¬	q)
0	1	**1**	1	0	0	1
0	1	**1**	0	0	0	1
0	1	**1**	1	1	1	0
0	1	**1**	0	0	1	0
1	0	**0**	1	0	0	1
1	0	**0**	0	0	0	1
1	0	**1**	1	1	1	0
1	0	**0**	0	0	1	0

Tabla de verdad de la fórmula: ¬ [p ↔ (q ∨ p)] …se lee *"No es cierto que sólo si p, entonces q o p";* también puede leerse *"No es cierto que p sólo si q o p"*. La conectiva dominante es el '¬'.

¬	[p	↔	(q	∨	p)]
0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0

8. ¿CÓMO *FORMALIZAR* EN LA LÓGICA PROPOSICIONAL CUALQUIER EXPRESIÓN DEL LENGUAJE NATURAL?

Formalizar una expresión del lenguaje natural consiste en destacar la «forma» en que se relacionan las proposiciones de esa expresión, prescindiendo del contenido o significado de éstas. Dicho de otro modo: consiste en "traducir" al lenguaje artificial y formal de la lógica las expresiones del lenguaje natural.

Ejemplos:

- *La comida no le supo bien*: $\neg p$
- *Mañana es sábado y nos iremos a la playa*: $p \wedge q$
- *Aunque tú no me quieras, yo te amo*: $\neg p \wedge q$
- *O bien te lo comes o no verás la tele*: $p \vee \neg q$
- *O lo recoges todo o no vas de excursión y no te regalo el vestido*:

$$p \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

- *Si vienes, no te lo olvides en casa*: $p \rightarrow \neg q$
- *Si no estuvo aquí el asesino, entonces no llegó a verle o lo supo demasiado tarde*: $\neg p \rightarrow (\neg q \vee r)$
- *No por mucho madrugar amanece más temprano*: $\neg (p \rightarrow q)$
- *Sólo si baja la Bolsa 15 puntos, deberás vender el 10% de las acciones de la empresa y no comunicarlo al Consejo*: $p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$
- *Sólo en el caso de que no sepas hacer el dibujo y haya dos preguntas en la 2ª casilla del examen, deberás contestar únicamente a la primera de ellas*:

$$(\neg p \wedge q) \leftrightarrow r$$

- *Si Pedro sabe hablar inglés, entonces no habla francés, aunque si no supiese hablar inglés, tampoco hablaría francés*: $(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$
- *Si llegas después de las 10, te encontrarás con la puerta cerrada y no podrás cenar*: $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$
- *Juan abrirá la puerta y saldrá a la calle, sólo en el caso de que, si viene María con el coche, no venga con ella Pedro*: $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \rightarrow \neg s)$
- *No es verdad que si Antonio estudia, entonces María no trabaje*:

$$\neg (p \rightarrow \neg q)$$

- *Sólo si tú no lo has matado, te dejaremos libre*: $\neg p \leftrightarrow q$

- *Si no crees que lo que te digo ni lo que te dice Juan, nunca sabrás lo que pasó*: $(\neg p \land \neg q) \rightarrow \neg r$
- *No es cierto que Fernando esté en Madrid y Juan no esté en Ávila:*

$$\neg (p \land \neg q)$$

- *Si eres licenciado, no puede ser cierto que no sepas leer ni escribir*:

$$p \rightarrow \neg(\neg q \land \neg r)$$

- *Sólo si conoces Oviedo, podrás disfrutar a fondo leyendo La Regenta y no perderte entre sus tumultuosas páginas*: $p \leftrightarrow (q \land \neg r)$

9. TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN E INDETERMINACIÓN

Al hacer la tabla de verdad de cualquier fórmula nos podemos encontrar con tres casos: que la tabla de verdad de la fórmula sólo tenga 1, que sólo tenga 0, y que tenga 1 y 0.

- TAUTOLOGÍA: Es una fórmula siempre válida, sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones que la integran. Es decir, es una fórmula cuya tabla de verdad final sólo tiene unos (1).
- CONTRADICCIÓN: Es una fórmula no válida nunca, sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones que la integran. Es decir, es una fórmula cuya tabla de verdad final sólo tiene ceros (0).
- INDETERMINACIÓN O CONTINGENCIA: Es una fórmula que puede ser válida o no, en función de los valores de verdad de las proposiciones que la integran. Es decir, es una fórmula cuya tabla de verdad final tiene unos (1) y ceros (0) no importa en qué proporción.

Ejemplos:

CONTRADICCIÓN:

p ∧ ¬ p Se lee *"p y no-p"*

p	∧	¬	p
1	**0**	0	1
0	**0**	1	0

(p → q) ∧ ¬ (p → q) Se lee *"Si p, entonces q, y no es cierto que si p, entonces q"*

(p	→	q)	∧	¬	(p	→	q)
1	1	1	**0**	0	1	1	1
1	0	0	**0**	1	1	0	0
0	1	1	**0**	0	0	1	1
0	1	0	**0**	0	0	1	0

TAUTOLOGÍA:

p ∨ ¬ p Se lee *"p o no-p"*

p	∨	¬	p
1	**1**	0	1
0	**1**	1	0

p → (p ∨ q) Se lee *"Si p, entonces p o q"*

p	→	(p	∨	q)
1	**1**	1	1	1
1	**1**	1	1	0
0	**1**	0	1	1
0	**1**	0	0	0

INDETERMINACIÓN:

p	→	¬	(p	∨	q)
1	**0**	0	1	1	1
1	**0**	0	1	1	0
0	**1**	0	0	1	1
0	**1**	1	0	0	0

Se lee: *"Si p, entonces no es cierto que p o q"*

Ejemplos de tautología:

$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

$(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

10. LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Las fórmulas que son tautologías constituyen esquemas válidos de inferencia o razonamientos formalmente válidos, y son llamadas por ello **leyes lógicas**.

- PRINCIPIOS

A las llamadas leyes lógicas hay que anteponerles tres Principios básicos y fundamentales del pensar humano: los principios de la Lógica.

1º) **Principio de identidad**: $p \rightarrow p$

2º) **Principio de no contradicción**: $\neg (p \wedge \neg p)$

3º) **Principio de tercio excluso** (*tertium non datur*): $p \vee \neg p$

- LEYES

1ª) **Ley de la Doble Negación**: $\neg \neg p \leftrightarrow p$

2ª) **Leyes de la Simplificación**: $(p \wedge q) \rightarrow p$

$(p \wedge q) \rightarrow q$

3ª) **Leyes de la idempotencia**: $(p \wedge p) \rightarrow p$

$(p \vee p) \rightarrow p$

4ª) **Ley de la adición**: $p \rightarrow (p \vee q)$

5ª) **Leyes del silogismo disyuntivo**: $[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$

$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$

6ª) **Leyes de De Morgan**: $\neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$\neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

7ª) **Ley del Modus Ponendo Ponens**: $\left[(p \rightarrow q) \wedge p \right] \rightarrow q$

8ª) **Ley del Modus Tollendo Tollens**: $\left[(p \rightarrow q) \wedge \neg q \right] \rightarrow \neg p$

9ª) **Ley de la Transitividad del Condicional**:

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \right] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

10ª) **Leyes del Bicondicional**: $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \right]$

11ª) **Leyes Conmutativas**:

a) Del conjuntor: $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

b) Del disyuntor: $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

c) Del bicondicional: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

12ª) **Leyes asociativas**:

$$\left[(p \wedge q) \wedge r \right] \leftrightarrow \left[p \wedge (q \wedge r) \right]$$

$$\left[(p \vee q) \vee r \right] \leftrightarrow \left[p \vee (q \vee r) \right]$$

11. DEFINICIÓN DE LAS CONECTIVAS ENTRE SÍ

Podemos definir unas conectivas por otras de modo que, si lo deseamos, cualquier fórmula con varias conectivas podríamos convertirla en otra fórmula equivalente a ella que sólo tuviera dos conectivas: el negador y otra conectiva que no sea el bicondicional.

1. Cómo definir el bicondicional: $p \leftrightarrow q =_{\text{df.}} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

2. Cómo definir las otras conectivas por el disyuntor:

a) Para definir el conjuntor por el disyuntor ($^{\wedge}/_{\vee}$), negamos toda la fórmula conjuntiva y cada una de las dos proposiciones unidas por la conjunción.

$$p \wedge q =_{\text{df.}} \neg(\neg p \vee \neg q)$$

b) Para definir el condicional por el disyuntor ($^{\rightarrow}/_{\vee}$), negamos sólo el antecedente.

$$p \rightarrow q =_{\text{df.}} \neg p \vee q$$

3. Cómo definir las otras conectivas por el conjuntor:

a) Para definir $^{\vee}/_{\wedge}$, exactamente igual que para definir la inversa $^{\wedge}/_{\vee}$:

$$p \vee q =_{\text{df.}} \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

b) Para definir $^{\rightarrow}/_{\wedge}$, negamos toda la fórmula condicional y el consecuente:

$$p \rightarrow q =_{\text{df.}} \neg(p \wedge \neg q)$$

4. Cómo definir las otras conectivas por el condicional:

a) Para definir $^{\vee}/_{\rightarrow}$, hacemos lo mismo que para definir la inversa $^{\rightarrow}/_{\vee}$:

$$p \vee q =_{\text{df.}} \neg p \rightarrow q$$

b) Para definir $^{\wedge}/_{\rightarrow}$, hacemos lo mismo que para definir la inversa $^{\rightarrow}/_{\wedge}$:

$$p \wedge q =_{\text{df.}} \neg(p \rightarrow \neg q)$$

RESUMIENDO:

1.- Para **definir** $^{\wedge}//_{\vee}$, negamos toda la fórmula y cada una de las dos proposiciones unidas por esa conjunción o disyunción.

2.- Para **definir** $^{\vee}//_{\rightarrow}$, negamos sólo el antecedente.

3.- Para **definir** $^{\wedge}//_{\rightarrow}$, negamos toda la fórmula y el consecuente.

ACTIVIDADES DE DEFINICIÓN DE CONECTIVAS:

Definir la siguiente fórmula por el <u>disyuntor</u>:

$$\mathbf{(p \rightarrow q) \wedge r}$$

1. $(p \rightarrow q) \wedge r$	Definir por $\vee$
2. $(\neg p \vee q) \wedge r$	Def. $^{\rightarrow}/_{\vee}$
3. $\neg [\neg (\neg p \vee q) \vee \neg r]$	Def. $^{\wedge}/_{\vee}$

Definir la siguiente fórmula por el <u>conjuntor</u>:

$$\mathbf{(p \leftrightarrow q) \vee r}$$

1. $(p \leftrightarrow q) \vee r$	Definir por $\wedge$
2. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \vee r$	Def. $\leftrightarrow$
3. $[\neg (p \wedge \neg q) \wedge \neg (q \wedge \neg p)] \vee r$	Def. $^{\rightarrow}/_{\wedge}$
4. $\neg \{\neg [\neg (p \wedge \neg q) \wedge \neg (q \wedge \neg p)] \wedge \neg r\}$	Def. $^{\vee}/_{\wedge}$

Definir la siguiente fórmula por el <u>condicional</u>:

$$\neg p \vee \neg \mathbf{(q \leftrightarrow r)}$$

1. $\neg p \vee \neg (q \leftrightarrow r)$	Definir por $\rightarrow$
2. $p \rightarrow \neg (q \leftrightarrow r)$	Def. $^{\vee}/_{\rightarrow}$
3. $p \rightarrow \neg [(q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)]$	Def. $\leftrightarrow$
4. $p \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow \neg (r \rightarrow q)]$	Def. $^{\wedge}/_{\rightarrow}$

ACTIVIDADES DE FORMALIZACIÓN:

Formalizar las siguientes expresiones del lenguaje natural:

1. *Si Manuel es un televidente extraordinario y un pésimo estudiante, entonces sus padres no estarán satisfechos y no le dejarán ver tanto la televisión.*

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg s)$$

2. *Sólo si sigue lloviendo, no pasaremos problemas de abastecimiento de agua este verano, pero sólo si deja de llover, no pasaremos problemas de inundaciones esta semana.*

$$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (\neg p \leftrightarrow \neg r)$$

3. *Si Pedro no estuvo aquí, entonces tal vez lo descubrió por otro lado o tal vez si no lo descubrió fue por pura causalidad.*

$$\neg p \rightarrow [q \vee (\neg q \rightarrow r)]$$

4. *Te veré si llegas a tiempo.*

$$\underbrace{\text{Te veré}}_{\mathbf{p}} \text{ si } \underbrace{\text{llegas a tiempo}}_{\mathbf{q}}$$

consecuente ← *antecedente*

$$q \rightarrow p$$

[A la hora de formalizar cualquier expresión del lenguaje natural, hay que tener especial cuidado cuando lo expresado es una **relación condicional** entre proposiciones, pues en toda expresión «condicional» se establece una relación de sucesión temporal: es decir, algo debe darse «antes» como condición (lo llamamos 'antecedente'), para que otra cosa se dé «después» como consecuencia (y que llamamos 'consecuente'). Así que ojo a la hora de discriminar qué es lo que debe darse antes y lo que se dará después como consecuencia de lo anterior.]

CÓMO FORMALIZAR LOS RAZONAMIENTOS:

Todo razonamiento es una expresión condicional cuyo antecedente está compuesto por la conjunción de las premisas del razonamiento, y cuyo consecuente es la conclusión del mismo.

Ejemplo: Formalizar el siguiente razonamiento:

Si utilizo un amperímetro, averiguaré la intensidad de la corriente eléctrica que atraviesa este circuito. Si utilizo un voltímetro, averiguaré la diferencia de potencial existente entre dos puntos del mismo. Si averiguo la intensidad y la diferencia de potencial, podré calcular la resistencia eléctrica del conductor. Utilizo un amperímetro y un voltímetro. Luego, podré calcular la resistencia eléctrica del conductor.

(Una vez formalizado nos queda así)

$$\left.\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ (q \wedge s) \to t \\ p \wedge r \end{array}\right\} \text{PREMISAS}$$

$$\begin{array}{l} \hline \quad t \end{array} \quad \big\} \text{CONCLUSIÓN}$$

Este razonamiento es equivalente a la siguiente fórmula condicional:

$$\boxed{\{ (p \to q) \wedge (r \to s) \wedge [(q \wedge s) \to t] \wedge (p \wedge r) \} \to t}$$

— PARTE 2ª —

EL CÁLCULO DEDUCCIÓN NATURAL (C. D. N.): LA LÓGICA PROPOSICIONAL COMO UN SISTEMA DE REGLAS DE INFERENCIA

La Lógica Proposicional puede presentarse en forma de Cálculo, esto es, como un conjunto coherente y sistemático de *Reglas de Inferencia*, mediante las cuales es posible llegar a deducir ciertas expresiones a partir de otras.

Las letras mayúsculas **A**, **B**, **C**, que utilizamos para presentar las reglas, son expresiones metalingüísticas: es decir, representan a cualquier expresión del lenguaje de la Lógica Proposicional.

REGLAS BÁSICAS:

1.- Regla de **Eliminación del Negador** **(E ¬)**

$$\boxed{\dfrac{\neg\neg A}{A}}$$

Si tenemos una expresión cualquiera A, doblemente negada, entonces podemos concluir en su afirmación.
A esta regla se la denomina también **Regla de la Doble Negación (D.N.).**

2.- Regla de la **Introducción del Negador** **(I ¬)**

$$\boxed{\dfrac{\left[\begin{array}{l} A \\ B \wedge \neg B \end{array}\right.}{\neg A}}$$

Si suponemos una expresión cualquiera A y se dedujera alguna contradicción (B ∧ ¬ B), entonces cerraremos el supuesto en la mencionada contradicción y concluiremos en la negación de la citada expresión supuesta (¬ A).
A esta regla se la denomina también **Regla de Reducción al Absurdo (Abs.).**

3.- Regla de la **Eliminación del Conjuntor** (E $_{\land}$)

$$\boxed{\frac{A \land B}{A \;/\; B}}$$

Si tenemos una expresión conjuntiva cualquiera A ∧ B, entonces podemos concluir en cualquiera de esas dos proposiciones que se hallan unidas por la conjunción, tanto A como B.

A esta regla se la denomina también **Regla de la Simplificación (Simp.).**

4.- Regla de **Introducción del Conjuntor** (I $_{\land}$)

$$\boxed{\frac{\begin{array}{l}A\\ B\end{array}}{A \land B}}$$

Si tenemos una expresión cualquiera A y tenemos otra expresión cualquiera B, entonces podemos concluir en la conjunción de ambas (A ∧ B).

A esta regla se la denomina también **Regla del Producto (Prod.).**

5.- Regla de la **Eliminación del Disyuntor** (E $_{\lor}$)

$$\boxed{\frac{\begin{array}{l}A \lor B\\ \left[\begin{array}{l}A\\ C\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}B\\ C\end{array}\right.\end{array}}{C}}$$

Si tenemos una expresión disyuntiva cualquiera (A ∨ B), y suponiendo cada una de las dos alternativas de esa disyunción se dedujera la misma expresión C, entonces podríamos concluir en esa expresión C.

A esta regla se la denomina también **Regla de los Casos (Cas.).**

6.- Regla de la **<u>Introducción del Disyuntor</u>** (I $_{\lor}$)

$$\boxed{\begin{array}{l} A \\ \hline A \lor B \end{array}}$$

Si tenemos una expresión cualquiera A, entonces podemos concluir en una expresión disyuntiva formada por esa expresión A y cualquier otra expresión B.

A esta regla se la denomina también **Regla de la Adición (Ad.).**

7.- Regla de la **<u>Eliminación del Condicional</u>** (E $_{\rightarrow}$)

$$\boxed{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}}$$

Si tenemos una expresión condicional cualquiera A → B y tenemos el antecedente (A) de ese condicional, entonces podemos concluir en el consecuente (B).

A esta regla se la denomina también **Regla del Modus Ponendo Ponens (M.P.).**

8.- Regla de la **<u>Introducción del Condicional</u>** (I $_{\rightarrow}$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right. \\ \hline A \rightarrow B \end{array}}$$

Si <u>suponemos</u> una expresión cualquiera A y se dedujera una expresión cualquiera B, entonces una vez 'cerrado' el supuesto en la expresión deducida B, concluiremos en el condicional entre A y B, es decir, A → B.

A esta regla se la denomina también **Teorema de la Deducción (T.D.)**

Ejercicios de demostración en el Cálculo:

En las demostraciones iremos poniendo todas las expresiones en líneas numeradas y sucesivas.

Habrá tres tipos de expresiones: las premisas (que son el punto de partida de la demostración y que reconoceremos porque a su izquierda pondremos una línea corta horizontal), las premisas supuestas por nosotros (que reconoceremos porque a su izquierda pondremos una línea horizontal que alargaremos verticalmente hasta volver a hacerla horizontal en alguna línea siguiente en la que cerraremos el supuesto) y las expresiones deducidas aplicando alguna regla del Cálculo (a su derecha habrá que indicar la regla utilizada y la línea o líneas a las que se ha aplicado tal regla).

Por último, decir que una demostración no está terminada mientras no se hayan cerrado todos los supuestos abiertos en ella. Asimismo, que los supuestos no pueden cerrarse en la misma línea en la que se han abierto y que no pueden cerrarse dos supuestos en una misma línea.

Ejemplos:

$\vdash$ este símbolo significa: 'demostrar' lo que hay a su derecha.

$p \to (q \wedge r)$
$p \wedge s$
―――――――
$r \wedge s$

— 1. $p \to (q \wedge r)$		$\vdash$ $r \wedge s$
— 2. $p \wedge s$		
3. p	$E\wedge$, 2	
4. $q \wedge r$	$E\to$, 1,3	
5. r	$E\wedge$, 4	
6. s	$E\wedge$, 2	
7. $r \wedge s$	$I\wedge$, 5,6	

$\neg p \to q$
$\neg q \wedge r$
―――――――
p

— 1. $\neg q \wedge r$		$\vdash$ p
— 2. $\neg p \to q$		
3. $\neg p$	*(Supuesto)*	
4. q	$E\to$, 2,3	
5. $\neg q$	$E\wedge$, 1	
6. $q \wedge \neg q$	$I\wedge$, 4,5	
7. $\neg\neg p$	$I\neg$, 3-6	
8. p	$E\neg$, 7	

$p \vee s$
$s \to p$
―――――――
$p \vee r$

— 1. $p \vee s$	$\vdash$ $p \vee r$	
— 2. $s \to p$		
3. p	*(Supuesto)*	
4. $p \vee r$	$I\vee$, 3	
5. s	*(Supuesto)*	
6. p	$E\to$, 2,5	
7. $p \vee r$	$I\vee$, 6	
8. $p \vee r$	$E\vee$, 1, 3-4, 5-7	

Demostrar:

$$\begin{array}{l} t \rightarrow p \\ p \rightarrow r \\ \neg r \\ \hline \neg t \end{array} \qquad \begin{array}{l} t \wedge p \\ p \rightarrow (q \vee r) \\ q \rightarrow s \\ r \rightarrow s \\ \hline s \end{array} \qquad \begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow r \\ p \\ \hline q \rightarrow r \end{array}$$

<u>REGLAS DERIVADAS O AUXILIARES:</u> (son reglas que se derivan o deducen de las básicas y nos facilitan y acortan las demostraciones)

1.- Regla de **<u>Eliminación del Bicondicional</u> (E $_{\leftrightarrow}$)**

$$\boxed{\begin{array}{l} A \leftrightarrow B \\ \hline A \rightarrow B \ / \ B \rightarrow A \end{array}}$$

Si tenemos una expresión bicondicional A ↔ B, podemos concluir de ella tanto el condicional A → B, como el condicional B → A.

Demostración:

— 1. p ↔ q	⊢	p → q
2. (p → q) ∧ (q → p)		Def. ↔, 1
3. p → q		E∧, 2

2.- Regla de **<u>Introducción del Bicondicional</u> (I $_{\leftrightarrow}$)**

$$\boxed{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \\ \hline A \leftrightarrow B \end{array}}$$

Si tenemos una expresión condicional A → B y otra como B → A, podemos concluir en la expresión bicondicional A ↔ B.

Demostración:

— 1. p → q	⊢	p ↔ q
— 2. q → p		
3. (p → q) ∧ (q → p)		I∧, 1,2
4. p ↔ q		Def.↔, 3

3.- Regla de la **Identidad (Id.)**

$$\frac{A}{A}$$

Si tenemos una expresión cualquiera A, podemos concluir de ella esa misma expresión A.

Demostración:

— 1. p	⊢ p	
2. ¬ p		
3 p ∧ ¬ p		I∧,1,2
4. ¬ ¬ p		I¬, 2-3
5. p		E¬, 4

4.- Regla del **Modus Tollendo Tollens (M.T.)**

$$\frac{A \rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}$$

Si tenemos una expresión condicional A → B, y tenemos la negación del consecuente de ese condicional (¬ B), podemos concluir en la negación del antecedente (¬ A).

Demostración:

— 1. p → q	⊢ ¬ p	
— 2. ¬ q		
3. p		
4. q		E→, 1,3
5. q ∧ ¬ q		I∧, 2,4
6. ¬ p		I¬, 3-5

5.- Regla del **Silogismo Disyuntivo (S.D.)**

$$\frac{A \vee B \qquad \neg A \;/\; \neg B}{B \;/\; A}$$

Si tenemos una expresión disyuntiva A ∨ B, y tenemos la negación de una de las dos alternativas de esa disyunción, podemos concluir la otra.

Demostración:

— 1. p ∨ q	⊢ q	
— 2. ¬ p		
3. ¬ p → q		Def.∨/→, 1
4. q		E→, 2,3

6.- Reglas de **De Morgan (D.M.)**

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B} \qquad\qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$$

7.- Regla de **Ex contradictione quodlibet (E.C.Q.)**

$$\boxed{\frac{A \wedge \neg A}{B}}$$

Esta regla nos permite deducir de una contradicción cualquier expresión B.

Ejercicios del **Cálculo de la Deducción Natural**

$q \rightarrow r$
$t \rightarrow \neg r$
q
______
$\neg t$

$q \wedge r$
$\neg t \rightarrow \neg r$
______
t

$s \rightarrow r$
$s \vee t$
$\neg r$
______
t

$r \leftrightarrow t$
$\neg t$
$r \vee s$
______
s

$\neg (\neg t \vee \neg q)$
$\neg s \rightarrow \neg q$
______
$t \wedge s$

$p \rightarrow r$
$r \rightarrow q$
p
______
$q \vee s$

$s \vee t$
$s \rightarrow p$
$t \rightarrow \neg q$
q
______
p

$p \wedge \neg t$
$s \rightarrow t$
$s \vee q$
$(q \wedge p) \rightarrow r$
______
r

$(p \wedge q) \rightarrow r$
p
______
$q \rightarrow r$

$p \rightarrow q$
$r \vee s$
$s \rightarrow \neg q$
$\neg r$
______
$\neg p$

$r \rightarrow s$
$p \vee q$
$\neg (\neg p \rightarrow s)$
______
$q \wedge \neg r$

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
q
______
$p \rightarrow r$

$p \leftrightarrow (q \vee r)$
$p \rightarrow s$
q
______
s

$(p \wedge q) \rightarrow r$
$\neg (p \vee r) \rightarrow s$
$p \rightarrow q$
______
$\neg s \rightarrow r$

$p \leftrightarrow q$
$q \vee s$
$p \rightarrow \neg t$
t
______
s

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
______
$q \rightarrow (p \rightarrow r)$

$$\begin{array}{l} (q \lor \neg s) \to t \\ \neg q \to r \\ p \to \neg s \\ t \to s \\ \hline p \to r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow (q \land t \land u) \\ \neg p \\ r \leftrightarrow \neg q \\ \neg r \to t \\ \neg u \to r \\ \hline r \lor s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ s \to t \\ s \lor p \\ \hline r \lor t \end{array}$$

$$\begin{array}{l} r \to s \\ \neg p \lor \neg q \\ \neg (p \to s) \\ \hline \neg q \land \neg r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (p \to q) \land r \\ s \to t \\ r \to s \\ \hline q \lor t \end{array}$$

$$\begin{array}{l} q \to p \\ \neg q \to r \\ \neg r \\ \hline p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg (\neg p \land \neg s) \\ p \to r \\ \neg q \to p \\ \neg r \\ \hline (p \lor s) \land q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \to \neg r \\ q \lor p \\ r \\ \hline q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg q \lor r \\ s \to \neg r \\ \neg s \to p \\ \hline \neg p \to \neg q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \to r \\ q \to s \\ \neg (r \land s) \\ \hline \neg p \lor \neg q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [p \to (q \land r)] \lor s \\ (p \land s) \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to \neg q \\ \hline r \to \neg p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \to \neg q \\ \neg p \to \neg r \\ s \to q \\ \hline s \to \neg r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \lor q \\ p \to (p \land s) \\ q \to s \\ \hline s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow (q \lor r) \\ p \to s \\ q \\ \hline s \end{array}$$

$(p \land q) \rightarrow r$
$\neg (p \lor r) \rightarrow s$
$p \rightarrow q$
___
$\neg s \rightarrow r$

$p \rightarrow q$
$r \rightarrow p$
$\neg r \rightarrow \neg t$
$\neg (s \land \neg r)$
$t \lor s$
___
$q \lor u$

$\neg p \leftrightarrow q$
$\neg (\neg q \lor r)$
$p \lor s$
___
$s \lor t$

$p \rightarrow q$
$r \lor \neg p$
___
$p \rightarrow (q \land r)$

$(p \land q) \rightarrow r$
$r \rightarrow s$
$q \land \neg s$
___
$\neg p$

$(p \land q) \rightarrow (r \lor s)$
$\neg (t \land \neg p)$
t
$t \leftrightarrow q$
___
$\neg r \rightarrow s$

$p \lor q$
$r \rightarrow \neg p$
$s \rightarrow r$
$\neg t \rightarrow s$
$r \leftrightarrow \neg q$
___
t

$\neg p \rightarrow p$
___
p

$(p \lor q) \rightarrow (r \land s)$
$\neg (\neg p \lor \neg r)$
$\neg t \rightarrow \neg (p \land s)$
___
t

$\neg q \rightarrow \neg p$
$p \lor r$
$r \rightarrow q$
___
$q \lor t$

$r \rightarrow (t \lor p)$
$\neg t \lor s$
$\neg s \rightarrow \neg p$
___
$r \rightarrow (s \lor a)$

$p \lor t$
$\neg t \rightarrow \neg q$
$(r \land s) \rightarrow (q \lor \neg p)$
___
$(r \land s) \rightarrow t$

$p \rightarrow q$
$s \lor p$
$\neg q \land r$
$(s \land r) \rightarrow t$
___
t

$[p \rightarrow (q \land r)] \lor s$
$(p \land s) \rightarrow r$
___
$p \rightarrow r$

FORMALIZA LOS SIGUIENTES RAZONAMIENTOS Y DEMUÉSTRALOS EN EL CÁLCULO:

O la Tierra gira alrededor del Sol o el Sol alrededor de la Tierra. Si la Tierra gira alrededor del Sol, deberíamos apreciar una variación en el brillo de las estrellas a lo largo de los años o en su posición con respecto a un observador terrestre. No se aprecia variación en el brillo de las estrellas a lo largo del año, ni se aprecia una variación en su posición con respecto a un observador terrestre. *Luego*, el Sol gira alrededor de la Tierra.

Si hay una situación de crisis económica, el índice de natalidad disminuye. Si avanza la medicina, las expectativas de vida serán mayores. Si el índice de natalidad disminuye y las expectativas de vida se hacen mayores, entonces la sociedad irá envejeciendo rápidamente. La crisis económica es un hecho y los avances en la medicina son constantes. *Luego*, la sociedad envejecerá con rapidez.

O no hay partículas de materia con una masa mayor que cero o el libro está equivocado. Si el libro está equivocado, entonces Luis tiene razón y deberíamos olvidarnos del tema. *Luego*, si hay partículas de materia con una masa mayor que cero, entonces deberíamos olvidarnos del tema.

No es cierto que ni vaya al fútbol ni vaya al cine. Pero si voy al cine, siempre vuelvo pronto a casa. Sin embargo, hoy no he vuelto pronto a casa. *Luego*, si no he ido al cine, entonces he ido al fútbol.

Si voy a Madrid, entonces tengo que viajar en tren o en coche. Si voy en tren, gasto mucho tiempo. Si voy en coche, gasto mucho dinero. *Luego*, si voy a Madrid, o gasto mucho tiempo o gasto mucho dinero.

(Otra conclusión podría ser: *Luego*, si voy a Madrid, entonces si no gasto mucho dinero, gasto mucho tiempo).

La ballena es un mamífero y no necesita branquias. Si no necesita branquias, debe respirar por la boca. *Luego*, no es cierto que la ballena sea mamífero y no respire por la boca.

Si llueve y salgo a la calle y no llevo paraguas, me mojo. Sin embargo, he salido a la calle, no llevo paraguas, pero no me mojo. *Luego*, no llueve.

Si Juan descubre al asesino y éste es el heredero, la herencia pasará a Luis. Sólo si el mayordomo es el asesino, Luis se quedará sin herencia. Juan descubre al asesino y Luis se queda sin herencia. *Luego*, el asesino no es el heredero, sino el mayordomo.

Si descubro las ruinas de la Atlántida, seré un arqueólogo famoso. Si encuentro las minas del rey Salomón, me haré rico. O bien encuentro las minas del rey Salomón o bien encuentro las ruinas de la Atlántida. *Luego*, me haré rico o seré un arqueólogo famoso.

Sólo si llueve mucho, entonces o bien la cosecha será grande o bien los pantanos se llenarán de agua. Pero si llueve mucho, habrá demasiados mosquitos. Resulta que la cosecha es grande. Luego, habrá mosquitos a montones.

Si bajo los precios, venderé mucho. Y si la calidad de mi mercancía es buena, mis clientes estarán satisfechos. *Luego*, si bajo los precios y la calidad de mi mercancía es buena, venderá mucho y mis clientes estarán satisfechos.

En este punto el cirujano o conecta la válvula y deja bloqueada la circulación sanguínea, o sigue operando lo más rápidamente que pueda. Si opta por la primera opción, dispone de tiempo para suturar, pero existe peligro de necrosis. Si opta por operar rápidamente, no hay riesgo de necrosis. Ahora bien, por experiencia sabemos que si la edad del paciente es elevada, el peligro de necrosis aumenta y la segunda opción es la apropiada. *Luego*, si el paciente tiene más de 60 años y no queremos que exista una situación irreversible de necrosis, no debemos emplear el primer método.

Sólo si se provoca a los tiburones mediante amenazas o detectan sangre, atacarán. *Luego*, si no se quiere ser atacado por los tiburones, hay que considerar vital evitar que detecten sangre o evitar amenazarles provocativamente.

Si se es joven, no hay que vacilar en filosofar. Si se es viejo, no hay que cansarse de filosofar. Luego, si eres joven o si eres viejo, o bien no debes vacilar en filosofar o bien no debes cansarte de ello.

No es cierto que los marcianos beban tequila pero no beban vino. Si no beben tequila, no cantan rancheras. Pero si beben vino, no cantan rancheras, pero sí fandangos. *Luego*, los marcianos o no cantan rancheras o cantan fandangos.

Si gasto todo lo que gano, me expongo a hundirme en la miseria. Pero si no gasto todo lo que gano, favorezco a la clase financiera. O bien gasto todo lo que gano o bien ahorro algo. *Luego*, me expongo a los horrores de la miseria o favorezco a la clase financiera.

O bien el Coruña gana o bien no pierde el Castellón. No es cierto que si pierde el Castellón, entonces no pierda el Osasuna. Ahora bien, si gana el Málaga, entonces pierde el Osasuna. *Luego*, no gana el Málaga y el Coruña gana.

— PARTE 3ª —

EL SILOGISMO ARISTOTÉLICO

Vamos a estudiar el llamado por ARISTÓTELES «silogismo categórico».

Aristóteles llamó 'silogismo' a todo razonamiento deductivo compuesto por dos premisas y una conclusión. Y 'silogismo categórico' a aquel razonamiento cuyas premisas y conclusión son proposiciones categóricas.

Una proposición categórica es aquella en la que se afirma o niega un predicado de un sujeto. Ejemplo : *Todos los hombres son mortales* (Todo S es P); *Ningún astronauta es egipcio* (Ningún S es P). Así pues, en este nivel de la Lógica se analizan las proposiciones simples para distinguir en ellas el **sujeto (S)** y el **predicado (P)**.

Por último, en las proposiciones categóricas hay que tener en cuenta si el predicado afirma o niega y si lo hace de **todos** los sujetos o sólo de **alguno**. Por ello hay cuatro tipos posibles de proposiciones categóricas:

1º) *Todos los S son P* ----**Prop. Categórica Universal Afirmativa**. La simbolizamos con una **A.**

2º) *Todos los S no son P (o dicho de otro modo: "Ningún S es P")* ----**Prop. Categórica Universal Negativa**. La simbolizamos con una **E**.

3º) *Algún S es P (lo que significa que "Hay el menos un S que es P")* -----**Prop. Categórica Particular Afirmativa.** La simbolizamos con una **I.**

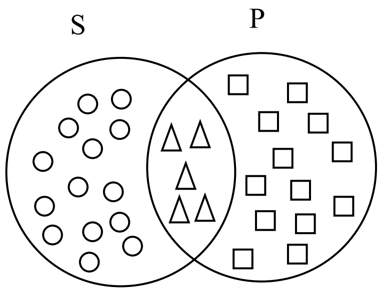
4º) *Algún S no es P (lo que significa que "Hay al menos un S que no es P")* ----**Prop. Categórica Particular Negativa.** La simbolizamos con una **O.**

Las proposiciones categóricas en este nivel de la Lógica no serán estudiadas como verdaderas o falsas, sino que serán consideradas como expresión de ciertas relaciones entre conjuntos o clases de cosas. Así, por ejemplo, la proposición *Todos los hombres son mortales*, expresa una determinadas relación entre el conjunto de las cosas que son hombres y el conjunto de las cosas que son mortales.

Definimos una clase o conjunto como una colección de objetos que tienen una propiedad en común. Esta propiedad es la que determina la **extensión** de la clase o conjunto, es decir, el número de objetos pertenecientes a dicha clase o conjunto.

REPRESENTACIÓN DE LAS PROPOSICIONES CATEGÓRICAS MEDIANTE LOS **DIAGRAMAS DE VENN:**

Los diagramas de VENN permiten representar gráficamente las proposiciones categóricas del siguiente modo:

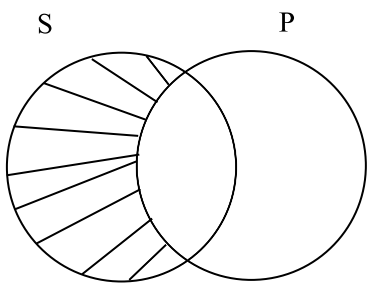


Las extensiones del sujeto (S) y del predicado (P) se representan mediante dos círculos que se cortan. De ello resultan tres clases o conjuntos de objetos: los que sólo son S y no P; los que sólo son P y no S; y los que son a la vez S y P.

Vamos a ver cómo se representan mediante los diagramas de VENN los cuatro tipos de proposiciones categóricas:

- Proposición Categórica Universal Afirmativa: **A**

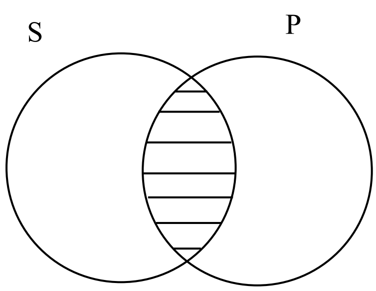
Todos los S son P



(La zona rayada significa que en ella no puede existir ningún miembro.)

- Proposición Categórica Universal Negativa: **E**

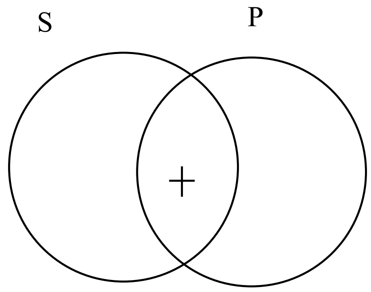
Ningún S es P



(La zona rayada significa que en ella no puede existir ningún miembro.)

- Proposición Categórica Particular Afirmativa: **I**

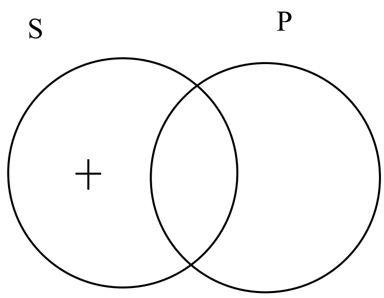
Algún S es P



(La cruz significa la existencia de al menos un miembro en esa zona.)

- Proposición Categórica Particular Negativa: **O**

Algún S no es P



(La cruz significa la existencia de al menos un individuo en esa zona.)

LAS **FIGURAS** Y LOS **MODOS** DEL SILOGISMO:

En un silogismo siempre hay dos premisas, una conclusión y tres términos:

1º) El término mayor (lo simbolizamos con una **P**): es el predicado de la conclusión.

2º) El término menor (lo simbolizamos con una **S**): es el sujeto de la conclusión.

3º) El término medio (lo simbolizamos con una **M**): que aparece una vez en cada una de las premisas, bien como sujeto o bien como predicado, pero que no aparece en la conclusión.

Teniendo en cuenta esto, los silogismos se clasifican en figuras:

1ª Figura:

M es P
S es M

S es P

El término medio es sujeto en la primera premisa y predicado en la segunda.

2ª Figura:

P es M
S es M

S es P

El término medio es predicado en ambas premisas.

3ª Figura:

M es P
M es S

S es P

El término medio es sujeto en ambas premisas.

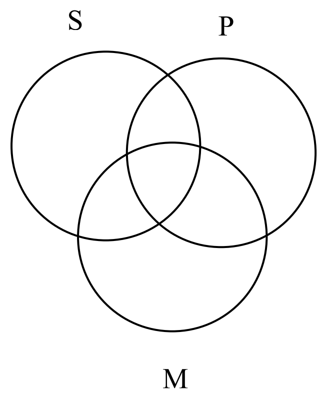
4ª Figura:

P es M
M es S

S es P

El término medio es predicado en la primera premisa y sujeto en la segunda.

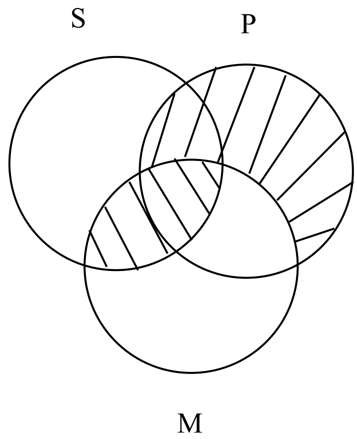
Además, cada figura del silogismo admite 64 modos distintos de combinar los cuatro tipos de proposiciones categóricas (A, E, I, O). (4×4×4=64). Sin embargo, no todos son válidos. ¿Cómo comprobar la validez de un silogismo?: Utilizando los **Diagramas de VENN**.



Para ello, representamos el silogismo mediante tres círculos que se cortan. Luego rayamos aquella o aquellas áreas que, de acuerdo con las premisas, carezcan de miembros y ponemos una cruz en las que, según las premisas, exista algún miembro. Y si una vez representadas de esta manera las premisas, nos quedase la conclusión también representada, el silogismo sería válido. En caso contrario, el silogismo no es válido.

Ejemplos:

Comprobar la validez de un silogismo **AEE** de la 2ª figura

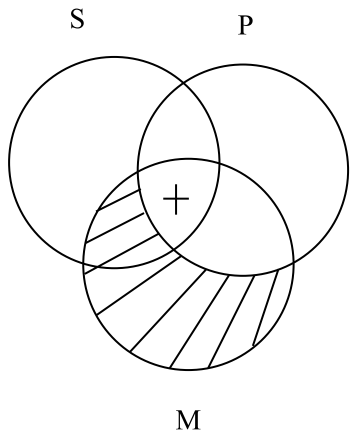


P -**A**- M
S -**E**- M

S -**E**- P

← *Silogismo válido, porque…*

Comprobar la validez de un silogismo **A I I** de la 3ª figura

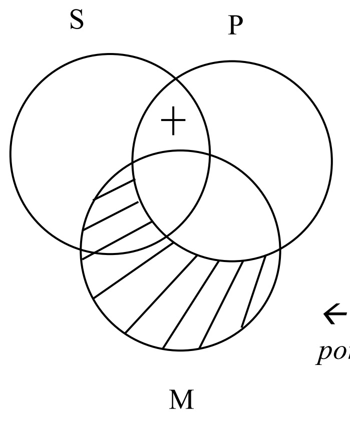


M -**A**- P
M -**I**- S

S -**I**- P

← *Silogismo válido, porque…*

Comprobar la validez de un silogismo **A O O** de la 1ª figura



M -**A**- P
S -**O**- M

S -**O**- P

← *Silogismo no válido, porque…*

EJERCICIOS:

Comprobar la validez de un modo AAA de la 1ª Figura.

“ “ “ AAE de la 1ª Figura.

“ “ “ EIO de la 2ª Figura.

“ “ “ OAO de la 3ª Figura.

“ “ “ IAI de la 3ª Figura.

Formalizar los siguientes silogismos (indicando su **modo** y **figura**) y comprobar su validez mediante los Diagramas de Venn:

Todos los músicos son entusiastas de Mozart
Algún músico es aficionado a los Beatles
Algún aficionado a los Beatles es un entusiasta de Mozart

Todos los ecologistas viajan en bicicleta
Ningún capitalista es ecologista
Ningún capitalista viaja en bicicleta

Ningún conejo es aficionado a la ópera
Algunos aristócratas son aficionados a la ópera
Algunos aristócratas no son conejos

Algún estudiante no sabe Latín
Todos los clásicos saben Latín
Ningún clásico es estudiante

Ningún hispanohablante es extraterrestre
Algunos alemanes son hispanohablantes
Algunos alemanes no son extraterrestres

Algunos artistas son perezosos
Todos los músicos son artistas
Algunos músicos son perezosos

Ningún explorador es sedentario
Algunos novelistas son sedentarios
Algunos novelistas no son exploradores

Algunos suecos son deportistas
Algunos suecos son exploradores
___
Algunos exploradores son deportistas

Todos los músicos son artistas
Ningún hipopótamo es artista
___
Ningún hipopótamo es músico

Algunos gasterópodos son ovíparos
Algunos gasterópodos no son animales comestibles
___
Algunos animales comestibles no son ovíparos

Todos los batracios son anfibios
Algunos animales venenosos no son anfibios
___
Algunos animales venenosos son batracios

Algunos monos son sentimentales
Algunos mamíferos no son monos
___
Algunos mamíferos no son sentimentales

Algunos hipopótamos son precavidos
Todos los hipopótamos son mamíferos
___
Algunos mamíferos no son precavidos

R. Magritte, *La Recherche De L'Absolu*, 1963